（別紙）

タイトル	２０２１年度　特別選抜（学校推薦型選抜・帰国生選抜） 共同教育学部（自然科学系　数学専攻）　　小論文・面接
評価の ポイント	（小論文の評価のポイント） ・与えられた条件から結論を導く過程を筋道立てて考えることができる。 ・高校数学（数Ⅲの内容を含む。ただし数Ⅲにおける積分法の範囲はのぞく。）の正確な推論ができる。 ・解決の過程を分かりやすい形で説明できる。 （面接の評価のポイント） ・数学科の教員としての資質がある。 ・数学に関する基本事項を理解しており、適切な場面で活用することができる。 ・数学に関する質問に対し、返答内容が的確である。

2021 学校推薦型選抜・帰国生選抜 小論文 (数学)

受 験 番 号		氏 名	

$\boxed{1}$ 次の問に答えよ。

(1) $f(x)$ を 3 次関数とする。このとき曲線 $y = f(x)$ は必ず変曲点を 1 つもつことを説明せよ。

(2) 曲線 $y = x^4 + 2ax^3 + 3bx^2 + x - 1$ が変曲点をもたないとする。このとき実数 a と b の満たす条件を求めよ。また a と b の満たす条件の表す領域を下の座標平面上に図示せよ。

[解答例]

(1) 3 次関数 $f(x)$ を

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad (a \neq 0)$$

とする。

このとき $f(x)$ の第 2 次導関数は

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

となることから $f''(x) = 0$ は 1 つの解 $x = -\dfrac{b}{3a}$ をもち, その前後で符号が変わる。

したがって 曲線 $y = f(x)$ は 1 つの変曲点 $(-\dfrac{b}{3a}, f(-\dfrac{b}{3a}))$ をもつ。

(2) $f(x) = x^4 + 2ax^3 + 3bx^2 + x - 1$ の第 2 次導関数は

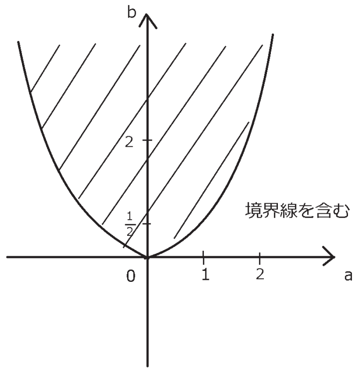
$$f''(x) = 12x^2 + 12ab + 6b = 6(2x^2 + 2ax + b)$$

である。 $f(x)$ が変曲点を持たないとすると $f''(x) \geqq 0$ がすべての x で成立する。

すなわち $2x^2 + 2ax + b = 0$ が相異なる 2 つの実数解をもたない。 これを判別式を用いて表すと

$$\frac{D}{4} = a^2 - 2b \leqq 0$$

となる。つまり a と b の満たす条件として, $b \geqq \dfrac{1}{2}a^2$ を得る。



得 点	

受験番号		氏名	

2　座標平面上を運動する点 P の座標 (x, y) が, 時刻 t の関数として $x = (1+t^2)\cos t,\ y = (1+t^2)\sin t\ (t > 0)$ と表されている。点 P の位置ベクトルを $\vec{p} = (x, y)$ とし, 時刻 t における点 P の速度を $\vec{v} = (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})$ とする。また 2 つのベクトル $\vec{p}$ と $\vec{v}$ のなす角を $\theta\ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とする。さらに $\vec{a}, \vec{b}$ を $\vec{a} = (\cos t, \sin t),\ \vec{b} = (-\sin t, \cos t)$ とする。このとき次の問に答えよ。

(1) $\vec{v} = c\vec{a} + d\vec{b}$ であるとき c, d を t を用いて表せ。

(2) $\cos\theta$ を c, d を用いて表せ。

(3) $\tan\theta$ を t を用いて表し, θ の最小値を求めよ。

[解答例]

(1)

$$\begin{aligned} \vec{v} &= (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}) \\ &= (2t\cos t - (1+t^2)\sin t,\ 2t\sin t + (1+t^2)\cos t) \\ &= 2t(\cos t,\ \sin t) + (1+t^2)(-\sin t,\ \cos t) \\ &= 2t\vec{a} + (1+t^2)\vec{b} \end{aligned}$$

よって　$c = 2t, \quad d = 1 + t^2$

(2)

$\vec{p} = (1+t^2)\vec{a} = d\vec{a}, \quad \vec{v} = c\vec{a} + d\vec{b} \quad (c,\ d > 0)$ であり, また $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$　であることから

$$\cos\theta = \frac{\vec{p} \cdot \vec{v}}{|\vec{p}||\vec{v}|} = \frac{cd}{d\sqrt{c^2 + d^2}} = \frac{c}{\sqrt{c^2 + d^2}}$$

(3)

$\cos\theta > 0,\ \theta \geqq 0$ より $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\tan\theta > 0$ であることから $\tan\theta$ の値は,　三平方の定理より

$$\tan\theta = \frac{d}{c} = \frac{1+t^2}{2t} = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t})$$

である。
また

$$\frac{1}{2}(t + \frac{1}{t}) \geqq \sqrt{t\frac{1}{t}} = 1$$

であることから $t = \dfrac{1}{t} = 1$ のとき $\tan\theta$ が最小になる。
$\tan\theta$ のグラフより $\tan\theta$ が最小のとき θ が最小になることから $\tan\theta = 1$ のとき $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ で最小となる。

得点	

受験番号		氏名	

3　命題「すべての 0 でない実数 a について $a^2 > 0$」 は真である。複素数においても同様なことが成立するだろうか。次の命題 (1) と命題 (2) について, それぞれの命題が真であれば証明し, 偽であれば反例をあげよ。

(1) 「すべての 0 でない複素数 α について α^2 の実部は正である」

(2) 「すべての 0 でない複素数 α について $\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4$ の中の少なくとも 1 つの実部は正である」

[解答例]

(1)　偽である。

反例として, $\alpha = i$ とすると $\alpha^2 = -1$ で α^2 の実部が負になるからである。

(2)　真である。

α を極形式を用いて $\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta),\ \ r > 0,\ -\pi < \theta \leqq \pi$ と表す。

$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2}$ ならば α の実部 $r\cos\theta$ は正である。
同様に $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ ならば α の実部 $r\cos\theta$ は正である。

$\frac{\pi}{2} < \theta \leqq \frac{3\pi}{4}$ ならば $\frac{3\pi}{2} < 3\theta \leqq \frac{9\pi}{4}$ であり α^3 の実部 $r^3\cos 3\theta$ は正である。
同様に $-\frac{3\pi}{4} \leqq \theta < -\frac{\pi}{2}$ ならば α^3 の実部 $r^3\cos 3\theta$ は正である。

$\frac{3\pi}{4} < \theta \leqq \pi$ ならば $\frac{3\pi}{2} < 2\theta \leqq 2\pi$ であり α^2 の実部 $r^2\cos 2\theta$ は正である。
同様に $-\pi < \theta < -\frac{3\pi}{4}$ ならば α^2 の実部 $r^2\cos 2\theta$ は正である。

$\theta = \frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}$ ならば $\alpha = ri,\ -ri$ であり $\alpha^4 = r^4$ の実部 r^4 は正である。

得点	