数　　学

氏名	

受験番号	

1　3 つの袋 A，B，C それぞれに，1 から 30 までの番号を 1 つずつ書いた 30 枚のカードが入っている。A，B，C の袋からカードを 1 枚ずつ取り出す。全部で 30^3 通りのすべての取り出し方について考える。このとき，取り出した 3 枚のカードの番号を，X，Y，Z $(X \leqq Y \leqq Z)$ とする。たとえば，A，B，C の袋から，それぞれ 24，16，24 を取り出したとき，$X = 16$，$Y = Z = 24$ である。

(1) Y が 12 となるカードの取り出し方は，30^3 通りのうち何通りあるか。

(2) Y が 12 で，X，Y，Z が等比数列となるカードの取り出し方は，30^3 通りのうち何通りあるか。

(3) X，Y，Z が，公差が 0 ではない等差数列となるカードの取り出し方は，30^3 通りのうち何通りあるか。

[解答欄]

(1) Y が 12 となるのは次のどれかの場合

(a) 3 枚のカードがすべて 12

(b) 3 枚のカードのうち 2 枚が 12

(c) X が 1〜11，Y が 12，Z が 13〜30

カードの引き方 30^3 通りのうち

(a) は 1 通り

(b) は $3 \times 29 = 87$ 通り

(c) は $3! \times 11 \times 18 = 1188$ 通り

よって，求める取り出し方を数えると，$1 + 87 + 1188 = 1276$　　答　1276 通り

(2) $X, 12, Z$ は等比数列 $\iff \dfrac{12}{X} = \dfrac{Z}{12} \iff 12^2 = XZ \iff 2^4 \cdot 3^2 = XZ$

これを満たす $X \leqq 12 \leqq Z$ の組は，$(6, 12, 24)$, $(8, 12, 18)$ $(9, 12, 16)$, $(12, 12, 12)$

よって，求める取り出し方は，$3! \times 3 + 1 = 19$　　答　19 通り

(3) X, Y, Z が公差 d の等差数列になるとき，$Y = X + d$, $Z = X + 2d$ より

$X \geq 1$ かつ $X + 2d \leq 30$ を満たす自然数 X と d ごとに，公差 d の等差数列が 1 つできる

d の条件は，$d \geq 1$ かつ $1 + 2d \leq 30$ より，$1 \leq d \leq 14$

この条件を満たす d ごとに，X は $1 \leq X \leq 30 - 2d$ を満たす自然数を取ることができる

よって，X, Y, Z が等差数列になる取り出し方を数えると

$3! \displaystyle\sum_{d=1}^{14} (30 - 2d) = 3!(30 \times 14 - 14 \times 15) = 6 \cdot 210 = 1260$　　答　1260 通り

得点	

数　　　学

氏名	

受験番号	

$\boxed{2}$ 座標平面上で，不等式 $\dfrac{2^{x+2}}{3^{y-2}}+\dfrac{3^y}{2^{x-1}}\leqq 18$ を満たす点 $(x,\,y)$ 全体の集合を D とする。

(1) 点 $(\log_5 3,\,\log_5 10)$ は D に属することを示せ。

(2) D を図示せよ。

[解答欄]

(1) $a:=2^{\log_5 3}=2^{\log_2 3\cdot\log_5 2}=3^{\log_5 2}$, $3^{\log_5 10}=3^{\log_5 2+\log_5 5}=3a$

$$\frac{2^{\log_5 3+2}}{3^{\log_5 10-2}}+\frac{3^{\log_5 10}}{2^{\log_5 3-1}}=\frac{4a}{3a\cdot 3^{-2}}+\frac{3a}{a\cdot 2^{-1}}=18 \text{ より}$$

(2) $\dfrac{2^{x+2}}{3^{y-2}}+\dfrac{3^y}{2^{x-1}}-18=6\left(\dfrac{2^{x+1}}{3^{y-1}}+2\left(\dfrac{2^{x+1}}{3^{y-1}}\right)^{-1}-3\right)$ より

$f(t):=t+\dfrac{2}{t}-3$ とおくと，$t:=\dfrac{2^{x+1}}{3^{y-1}}>0$ について

$$\begin{aligned}
\frac{2^{x+2}}{3^{y-2}}+\frac{3^y}{2^{x-1}}\leqq 18 &\iff f(t)=\frac{1}{t}(t-1)(t-2)\leqq 0\\
&\iff 1\leqq t\leqq 2\\
&\iff 1\leqq \frac{2^{x+1}}{3^{y-1}}\leqq 2\\
&\iff 3^{y-1}\leqq 2^{x+2}\leqq 2\cdot 3^{y-1}
\end{aligned}$$

ここで 3 を底とする対数をとると

$$\begin{aligned}
3^{y-1}\leq 2^{x+1}\leqq 2\cdot 3^{y-1} &\iff \log_3 3^{y-1}\leq \log_3 2^{x+1}\leqq \log_3(2\cdot 3^{y-1})\\
&\iff y-1\leqq (x+1)\log_3 2\leqq \log_3 2+(y-1)\\
&\iff y\leqq x\log_3 2+1+\log_3 2 \text{ かつ } y\geqq x\log_3 2+1
\end{aligned}$$

よって，$k:=\log_3 2$ とおくと，D は平行な 2 直線 $y=kx+1$ と $y=kx+1+k$ で挟まれた部分ただし，境界線を含む　　[図は省略]

得点	

数　　学

氏名	

受験番号	

3　空間内に AB = 3，BC = 4，CA = 5 を満たす定点 A，B，C と，PB = PC = 6 を満たし，3 点 A，B，C を通る平面上にはない動点 P がある。線分 BC の中点を M，線分 CA の中点を N，△PBC の外心を O とする。

(1) 線分 OP の長さを求めよ。

(2) ∠MNO が直角になるときの cos∠PMN の値を求めよ。

(3) 4 点 P，A，B，C を通る球の半径の最小値を求めよ。

[解答欄]

(1) $\theta := \angle \mathrm{BPC}$, $r :=$OP とおく

正弦定理より，$2r = \dfrac{4}{\sin\theta}$ なので，$r = \dfrac{2}{\sin\theta}$

余弦定理より，$\cos\theta = \dfrac{2\cdot 6^2 - 4^2}{2\cdot 6\cdot 6} = \dfrac{7}{9}$

よって，$r = \dfrac{2}{\sqrt{1-\left(\frac{7}{9}\right)^2}} = \dfrac{9}{2\sqrt{2}} = \dfrac{9\sqrt{2}}{4}$　　答 $\underline{\dfrac{9\sqrt{2}}{4}}$

(2) $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2 = \mathrm{CA}^2$ より，△ABC は ∠ABC を直角とする直角三角形であり

２直線 AB と MN が平行なので，直線 MN は線分 BC の垂直二等分線であることに注意する

３点 A，B，C を通る平面を α とし，α に垂直で直線 MN を含む平面を β とする

空間の点 D と，D を通る α の垂線と α の交点 H について，$\mathrm{HB}^2 = \mathrm{DB}^2 - \mathrm{DH}^2$, $\mathrm{HC}^2 = \mathrm{DC}^2 - \mathrm{DH}^2$ より

DB=DC $\Longleftrightarrow$ HB = HC $\Longleftrightarrow$ H は直線 MN 上の点 $\Longleftrightarrow$ D は β 上の点，が成り立つ

よって，β は２点 B，C から等距離にある空間の点全体の集合と一致し

動点 P は，β 上で M を中心とする半径 $\sqrt{6^2-2^2} = 4\sqrt{2}$ の円を描く（ただし，直線 MN 上の２点を除く）

N を通る α の垂線を ℓ とすると，ℓ は β 上にあり，直線 MP が ℓ と O で交わるときに題意を満たす

小問 (1) の解より，OM$= 4\sqrt{2} - \dfrac{9\sqrt{2}}{4} = \dfrac{7\sqrt{2}}{4}$ なので

∠MNO が直角になるとき，$\cos\angle\mathrm{PMN} = \dfrac{\mathrm{MN}}{\mathrm{OM}} = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{4}{7\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{7}$　　答 $\underline{\dfrac{3\sqrt{2}}{7}}$

(3) 直線上にない３点から等距離にある空間の点全体の集合は，小問 (2) の解で 展開した議論により

３点を通る平面の垂線で，３点を頂点とする三角形の外心を通るものと一致することに注意する

３点 P，B，C を通る平面の O を通る垂線を m とすると，m は β 上にあり

△ABC の外心が N で，N を通る α の垂線が ℓ であることより

ℓ と m の交点を Q とすると，Q が４点 P，A，B，C を通る球の中心である

Q=O または，Q≠O かつ ∠POQ は直角なので，当該球の半径 $= \sqrt{\mathrm{OP}^2 + \mathrm{OQ}^2} \geqq \mathrm{OP}$ となり

Q=O のとき，すなわち，小問 (2) の題意が満たされるときに等号が成立する

よって，小問 (1) の解より，求める最小値は $\mathrm{OP} = \dfrac{9\sqrt{2}}{4}$ である　　答 $\underline{\dfrac{9\sqrt{2}}{4}}$

得点	

数　　学

氏 名	

受験番号	

4 曲線 $y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+1\ (0 \leqq x \leqq 1)$ を C とし，直線 $y=1-x$ を ℓ とする。

(1) C 上の点 $(x,\, y)$ と ℓ の距離を $f(x)$ とするとき，$f(x)$ の最大値を求めよ。

(2) C と ℓ で囲まれた部分を ℓ の周りに1回転してできる立体の体積を求めよ。

[解答欄]

(1) $g(x)=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+1$ とする

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}|x+g(x)-1|=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}(x-x^2)=\frac{\sqrt{2}}{4}(x-x^2)$

よって，$f(x)=\frac{\sqrt{2}}{4}\left\{-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right\}$ より

求める最大値は $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{2}}{16}$　　答 $\underline{\frac{\sqrt{2}}{16}}$

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ について，点 $\mathrm{P}(x, g(x))$ から直線 $y=1-x$ に下した垂線の足を Q とし

線分 AQ の長さを t とすると，$t=\sqrt{2}x-f(x)=\sqrt{2}x-\frac{\sqrt{2}}{4}(x-x^2)=\frac{\sqrt{2}}{4}(x^2+3x)$

よって，$F(t):=f(x)$ とし，求める体積を V とすると

$$
\begin{aligned}
V&=\pi\int_0^{\sqrt{2}}F(t)^2\,dt\\
&=\pi\int_0^1 f(x)^2\cdot\frac{dt}{dx}\,dx\\
&=\pi\int_0^1\frac{1}{8}(x-x^2)^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}(x^2+3x)'\,dx\\
&=\frac{\sqrt{2}}{32}\pi\int_0^1(2x^5-x^4-4x^3+3x^2)\,dx\\
&=\frac{\sqrt{2}}{32}\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-1+1\right)\\
&=\frac{\sqrt{2}}{32}\pi\cdot\frac{2}{15}\\
&=\frac{\sqrt{2}}{240}\pi
\end{aligned}
$$

答 $\underline{\frac{\sqrt{2}}{240}\pi}$

得点	

数　　　学

氏名	

受験番号	

5　複素数平面上で，点 z が原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき，$w=\dfrac{4z+5}{z+2}$ で表される点 w の描く図形を C とする。また，$a=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$，$b=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ とする。ただし，i は虚数単位である。

(1) $a^n=b^n$ を満たす自然数 n のうち，最小のものを求めよ。

(2) C を複素数平面上に図示せよ。

(3) $a^n=\dfrac{4b^n+5}{b^n+2}$ を満たす自然数 n のうち，最小のものを求めよ。

[解答欄]

(1) $a=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$，$b=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ より

$$a^n=b^n \iff \left(\frac{a}{b}\right)^n=1$$
$$\iff \left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}^n=1$$
$$\iff \left\{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right\}^n=1$$
$$\iff \cos\left(\frac{n\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)=1$$

これより，$n=24$　　答　$n=24$

(2) $w=\dfrac{4z+5}{z+2}\quad(z\neq-2) \iff z=-\dfrac{2w-5}{w-4}\quad(w\neq4)$ より

$$|z|=1 \iff \left|\frac{2w-5}{w-4}\right|=1$$
$$\iff |2w-5|=|w-4|$$
$$\iff (2w-5)(2\overline{w}-5)=(w-4)(\overline{w}-4)$$
$$\iff 3\{w\overline{w}-2(w+\overline{w})+3\}=0$$
$$\iff |w-2|^2=1$$

よって，C は点 2 中心，半径 1 の円　　[図は省略]

(3) $|b^n|=1$ なので，(2) の解より $\dfrac{4b^n+5}{b^n+2}$ は点 2 中心，半径 1 の円周上にある

一方，a^n は点 0 中心，半径 1 の円周上にあり，これら 2 つの円は点 1 のみを共有するので

$a^n=\dfrac{4b^n+5}{b^n+2}=1$ を満たす自然数 n のうち，最小のものを求めればよい

$a^n=1 \iff \cos\left(\dfrac{n}{3}\pi\right)+i\,\sin\left(\dfrac{n}{3}\pi\right)=1$ より，n は 6 の倍数

$\dfrac{4b^n+5}{b^n+2}=1 \iff b^n=-1 \iff \cos\left(\dfrac{n}{4}\pi\right)+i\,\sin\left(\dfrac{n}{4}\pi\right)=\cos\pi+i\,\sin\pi$ より

$\dfrac{n}{4}=1+2k$（k は 0 以上の正数），すなわち，$n=4+8k$（k は 0 以上の正数）

これが 6 の倍数となる最小の k は 1

よって，$n=12$　　答　$n=12$

得点	